Gr° = 1

Essma, Ramle, Minetou
Marième.

7D$_3$

Exercices des fonctions (impaire)

Exercice 1 => solution :

$\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

1°/ $D_f = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

• $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

=> f est strictement croissante ↗ sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

2°/ f réalise une bijection sur $\mathbb{R}$?

• f est continue sur $\mathbb{R}$

• f est strictement ↗ sur $\mathbb{R}$

• $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

=> f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

3°/ f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J = \mathbb{R}$

• $0 \in J = \mathbb{R}$

=> $f(x) = 0$, admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

• $f(-1) = -1 - 1 + 1 = -1$

• $f(0) = 1$

$f(0) \times f(-1) < 0$ $\qquad$ TVI

$$\boxed{-1 < \alpha < 0}$$

4°/ $-1 < \alpha < 0$

$\dfrac{(-1)+0}{2} = -0,5$

$f(-0,5) = 0,377 > 0$

$$\boxed{-1 < \alpha < -0,5}$$

• $\dfrac{(-1)+(-0,5)}{2} = -0,75$

$f(-0,7) = -0,04 < 0$

$$\boxed{-0,7 < \alpha < -0,5}$$

• $\dfrac{(0,7)+(-0,5)}{2} = -0,6$

$f(0,6) = 0,18 > 0$

$\boxed{-0,7 < \alpha < -0,6}$

$\alpha = -0,65$

5°/ La courbe :

. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x}$

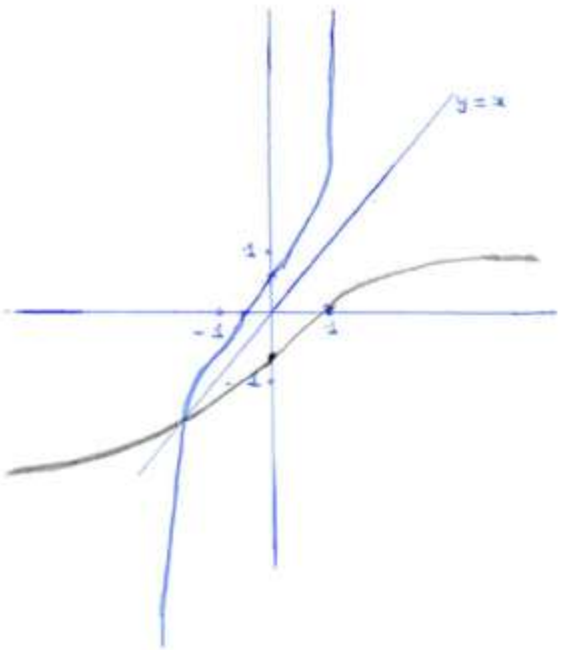
$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$

$\mathcal{C}$ admet une b.p de direction (Oy) au voisinage de ∞.

$\mathcal{C}' \cap (Oy)$, $f(0) = 1$, $(0, 1)$

$\mathcal{C}_1 \cap (Ox)$ $f(1) = 0$

$\Rightarrow h = \alpha$



FIN

Essma / Ahmed salime
Ramle / mohamed
Marieme / Ahmed salime
Minetou / B Mokthar

Exercice 3 :

Solution :

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

1/ $D_f =]-\infty, +\infty[$

. lim . f est un polynome => f est derivable sur IR, $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0$

$= 3(x-1)(x+1) = 0$

$\boxed{x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1}$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = -1$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$

. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

. T.V :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	$+\infty$

2/ f est continue et change de signe 3 fois exactement sur IR, alors d'après le théorme T.V.I L'equation $f(x) = 0$ admet 3 solution dans IR.

$\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma$

• $f(1,5) = (-1,5)^3 + 5,5 = +2,125 > 0$

$\Rightarrow -2 < \alpha < -1,5$

. $f(-1,7) = (-1,7)^3 + 6,1 = 1,187 > 0$

$\boxed{\Rightarrow -2 < \alpha < -1,7}$

c'est un encadrement de α à 3.10^{-1} près

. de La m̂ manière on abtient :

$\boxed{0,3 < \beta < 0,5}$, $\boxed{1,5 < \gamma < 1,8}$

3/ $\mathcal{C}$ coupe (ox) si $f'(x) = 0$ c.a.d $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$, $(\gamma, 0)$. $\mathcal{C}$ coupe (oy) si $x = 0$

$f(0) = 1 \Rightarrow \omega(0, 1)$

Mq $\omega(0, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

$f(2a - x) + f(x) = f(-x) + f(x)$

$= (x)^3 - 3(x)^3 + 1 + x^3 - 3x + 1 =$

$= -x^3 + 3x + x^3 - 3x + 2$

$= 2 = 2 \times 1 = 2b$

Alors $w(0, 1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

4.a) $T : y = f'(0)(x+1) + f(0)$

$\Rightarrow \boxed{y = -3x + 1}$

b) Positions relatives :

signe de $d(x) = f(x) - y$

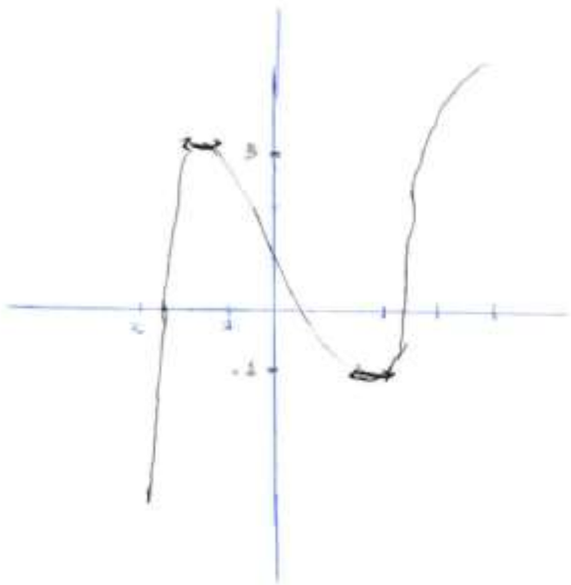
$= x^3 - 3x + 1 - (-3x+1) \Rightarrow$

$d(x) = x^3$ m̂ signe de x.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-$	0	$+$
$d(x)$	$-$	0	$+$
P.R	$T/\mathcal{C}$		$\mathcal{C}/T$

In : Si la tangente traverse la courbe au point de contact, alors ce point est un pt d'inflexion de $\mathcal{C}$, donc w est un pt d'inflexion de $\mathcal{C}$.

5.a) La courbe $\mathcal{C}$:



$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty$

$\mathcal{C}$ admet une bp de direction (oy) au voisinage ~~une bp~~ de (∞)

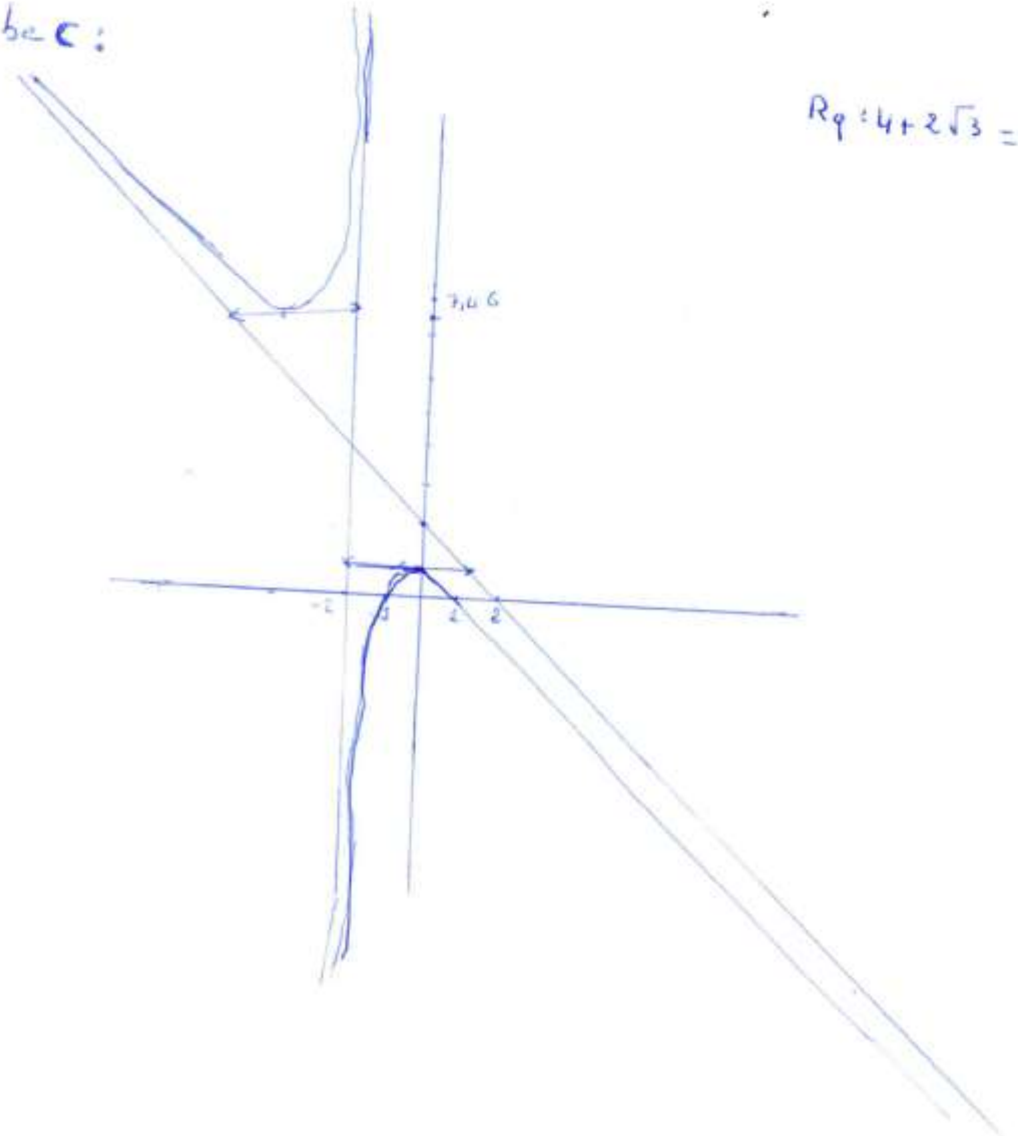
b) $f(x) = m$

m	Le nombre de solution
$m > 3$	une seule solution
$m = 3$	2 solution
$-1 < m < 3$	3 solution
$m = -1$	2 solution
$m < -1$	une seul solution

Fin

5/ La courbe **C** :

$R_q : 4 + 2\sqrt{3} = 7,46$



3°/ f est une fonction rationnelle, donc dérivable sur son domaine de définition

on a : $f(x) = -x + 2 - \frac{3}{x+2}$, donc $f'(x) = -1 + 0 - \frac{-3}{(x+2)^2} = \frac{3-(x+2)^2}{(x+2)^2}$

on factorise : $f'(x) = \frac{(\sqrt{3}-2-x)(\sqrt{3}+2+x)}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow (\sqrt{3}-2-x)(\sqrt{3}+2+x) = 0 \Leftrightarrow (x = -2-\sqrt{3}$ ou $x = -2+\sqrt{3})$

$f(-2-\sqrt{3}) = 4+2\sqrt{3}$ et $f(-2+\sqrt{3}) = 4-2\sqrt{3}$

• Tableau de variation :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$4+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$4-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$

On remarque que La dérivée s'annule deux fois : donc La courbe admet deux tangente horizontal. Ce sont Les tangentes aux extrema

=> les équation : $T_1 : y = 4+2\sqrt{3}$

$T_2 : y = 4-2\sqrt{3}$

4°/ Le centre de symétrie de (C), s'il existe est au milieu des extrema, sont en A(-2, 4) c'est aussi L'intersection des asymptotes.

$\boxed{\text{on montre que A est bien centre de symétrie de (C)}}$

$f(-4-x) + f(x) = 4 + x + 2 - \frac{3}{-4-x+2} - x + 2 - \frac{3}{x+2}$

$f(-4-x) + f(x) = 8$

Alors A est bien centre de symétrie de (C).

Exercice 5 => solutions

soit La fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $f(x)=\frac{1-x^2}{2+x}$

1°/ Par Identification :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}=\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$$

$$\frac{-x^2+1}{x+2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ 2a+b=0 \\ 2b+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=-3 \end{cases}$$

Donc $f(x)=-x+2-\frac{3}{x+2}$ (on utilise cette écriture de f par La suite)

2°/ on a : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(-x+2)\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{3}{x+2}\right)=0$, Alors La courbe $(\mathcal{C})$ admet d'équation $\boxed{y=-x+2}$

on deduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+2-\frac{3}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$

. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+2-\frac{3}{x+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$

On a aussi : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-}(x+2)=0^- \\ \lim\limits_{x\to-2^-}(-x^2+1)=-3\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^+}(x+2)=0^+ \\ \lim\limits_{x\to-2^-}(-x^2+1)=-3\end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty$

Alors La courbe admet une asymptote verticale d'équation $x=-2$.

Essma / mohamed (salem)
Ramla / mohamed
Mnetou / mokhtar
Mariem / Ahmed
salma

Nombres Complex

Exercice 4 :

Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telque :

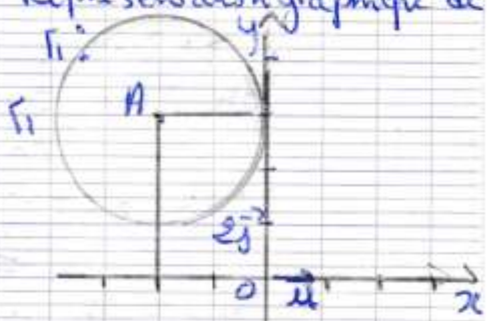
1. $|z+2-3i| = 2$ 2. $|z+4+3i| = |z-3-4i|$

3. $\left|\frac{z+2-3i}{z-1-i}\right| = 1$ 4. $|z+2-3i| = |\bar{z}+2i|$

5. $|(1-i)z-2i| = |(1+i)z-4-4i|$ 6. $\left|\frac{2z+1+2i}{z-3i}\right| = 2$

Solution

Représentation graphique de Γ_1 :



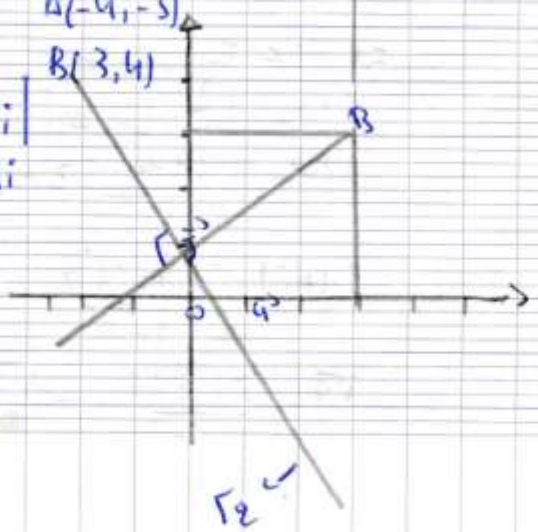
1) $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow |z+2-3i| = 2$

On pose $z_A = -2+3i$

Alors $M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow |z_M - z_A| = 2$

$M \in \Gamma_1 \Leftrightarrow AM = 2$

donc Γ_1 est le cercle de centre A et de rayon 2.



2) $M \in \Gamma_2 \Leftrightarrow |z+4+3i| = |z-3-4i|$

On pose $z_A = -4-3i$, $z_B = 3+4i$

$\Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B|$

$\Leftrightarrow AM = BM$

donc Γ_2 est la médiatrice du segment [AB]

3) $M \in \Leftrightarrow \left|\frac{z+2-3i}{z-1i}\right|^{\Gamma_2} = 1$

$\Leftrightarrow \left|\frac{z+2-3i}{z-1-i}\right| = 1$

$\Leftrightarrow |z-1-i| = |z+2-3i|$

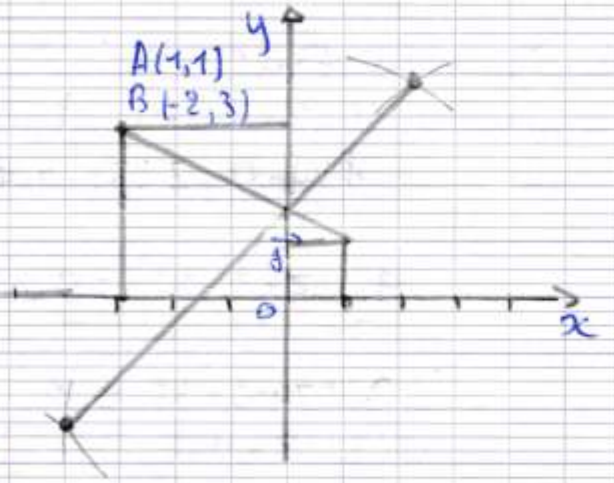
on pose $z_B = 1+i$

$z_A = -2+3i$

$\Leftrightarrow |z-z_A| = |z-z_B|$

$\Leftrightarrow MA = MB$

donc Γ_3 est la mediatrice du segment [AB]



4) $M \in \Gamma_4 \Leftrightarrow |z+2-3i| = |z+2i|$

$|z+2-3i| = |\bar{z}+2i|$

$|z+2-3i| = |\overline{z-2i}|$

on pose $z_A = -2+3i$

$z_B = 2i$

donc $|z-z_A| = |z-z_B|$

$\Leftrightarrow MA = MB$

Γ_4 est le mediatrice du Segment [AB]

5) $M \in \Gamma_5 \Leftrightarrow$

$|(1-i)z+2i| = |(1+i)z-4-4i|$

$|(1-i)| \left|\frac{(1+i)}{1+i}z - \frac{2i}{1-i}\right| =$

$|1+i| \left[\frac{(1+i)}{1+i}z - \frac{4+4i}{1+i}\right]$

$\sqrt{2} \left|z - \frac{2i}{1-i}\right| = \sqrt{2} \left|z - \frac{4(1+i)}{1+i}\right|$

$$\left|\frac{z-2i}{1-i}\right| = |z-4|$$

$$\left|z - \frac{2i(1+i)}{1^2+i^2}\right| = |z-4|$$

$$\left|z - \frac{2i-2}{2}\right| = |z-4|$$

$$|z-i+1| = |z-4|$$

on pose $z_A = -1+i$ $z_B = 4$

$|z-z_A| = |z-z_B|$ $AM = BM$

$\Rightarrow \Gamma_5$ est la mediatrice du segment [AB].

6) $M \in \Gamma_6 \Leftrightarrow \left|\frac{2\bar{z}+1+2i}{z-3i}\right| = 2$

$$\Leftrightarrow |2\bar{z}+1+2i| = 2\ |z-3i|$$

$$|2\bar{z}+1+2i| = 2|z-3i|$$

$$|2z+1-2i| = 2\ |z-3i|$$

$$2\left|z+\frac{1-2i}{2}\right| = 2\ |z-3i|$$

$$2\left|z+\frac{1}{2}-i\right| = 2\ |z-3i|$$

$$\left|z+\frac{1}{2}-i\right| = |z-3i|$$

on pose $z_A = -\frac{1}{2}+i$, $z_B = 3i$

$M \in \Gamma_6 \Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B|$

$MA = MB$

Γ_6 est la mediatrice de [AB] avec

$A\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ $B\ (0, 3)$

Nomberes complexes

Ex:1

$*\ z_1 = (2+5i)(3+2i) = 6+4i+15i-10 \Rightarrow \boxed{z_1 = -4+19i}$

$*\ z_2 = \frac{2+3i}{3+2i} = \frac{2+3i}{3+2i} \times \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{6-4i+9i+6}{13} = \frac{12+5i}{13}$

$\boxed{z_2 = \frac{12}{13} + \frac{5}{13} i}$

$*\ z_3 = \frac{2i+3}{5-i} + 2-7i = \frac{2i+3+(2-7i)(5-i)}{5-i} = \frac{\cancel{2i}+3+10-\cancel{2i}-35i-7}{(5)^2+(1)^2}$

$= \frac{6-35i}{5-i} \times \frac{5+i}{5+i} = \frac{30+6i-175i+35}{(5)^2+(1)^2} = \frac{65-169i}{26} = \frac{65}{26} - \frac{169}{26} i$

$= \frac{13\times5}{13\times2} - \frac{13\times13}{13\times2} \Rightarrow \boxed{z_3 = \frac{5}{2} - \frac{13}{2} i}$

$*\ z_4 = (1-2i)^3 = (1-2i)(1-2i)^2 = (1-2i)((1)^2-(2)^2-2\times1\times2i)$

$= (1-2i)(1-4-4i) = (1-2i)(-3-4i) = 3-4i-6i-8$

$\boxed{z_4 = 11+2i}$

$*\ z_5 = (3+i)(2+3i)(1-2i) = (6+9i+2i-3)(1-2i)$

$= (3-11i)(1-2i) = 3-6i+11i+22 = 25+5i$

$= \boxed{z_5 = 25+5i}$

$*\ z_6 = \frac{4-5i}{2+3i} + \frac{2-3i}{5+2i} + 1-2i = \frac{4-5i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{8-12i-10i-15}{(2)^2+(3)^2}$

$= \frac{-7-22i}{13} = \frac{-7}{13} - \frac{22}{13} i \qquad \frac{2-3i}{5+2i} \times \frac{5-2i}{5-2} = \frac{10-4i-15i-6}{(5)^2+(2)^2}$

$= \left(-\frac{7}{13} + \frac{4}{29} + 1\right) + \left(-\frac{22}{13} - \frac{19}{29} - 2\right) i \Rightarrow \boxed{z_6 = \frac{226}{377} - \frac{1639}{377} i}$

1

EX-10 Bac 2010

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z)=z^3-z^2-4z-6$

ⓐ- Pour calculer $P(3)$ on remplace dans l'expression de $P(z)$

$$P(3)=(3)^3-(3)^2-4.3-6$$
$$=27-9-12-6=0$$

ⓑ- Pour determiner les réels a et b tels que pour tout z on a : $P(z)=(z-3)(z^2+az+b)$. on peut utiliser le tableau d'Horner :

	1	-1	-4	-6
3		3	6	6
	1	2	2	0

D'où $a=2$, $b=2$, $P(3)=0$ et $P(z)=(z-3)(z^2-2z+2)$

ⓒ- Pour resoudre l'equation $P(z)=0$:

Soit $z-3=0$, d'où $z_0=3$

Soit $z^2+2z+2=0$, d'où $\Delta=-4=(2i)^2$, et les solutions sont : $z_1=-1-i$ et $z_2=-1+i$

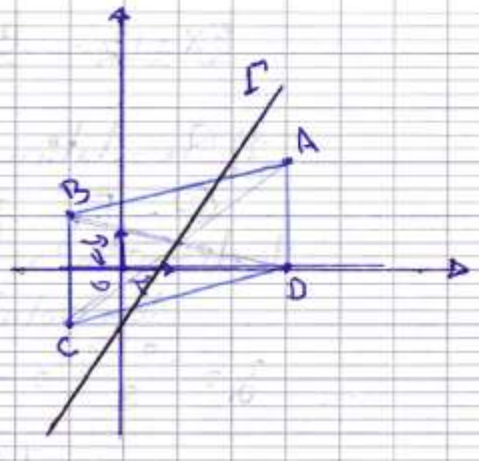
Alors l'ensemble de solution de l'equation $P(z)=0$ est
$$S=\{3;-1+i;-1-i\}$$

2) le plan complexe est muni d'un repere orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$

ⓐ- Pour placer les points A, B, C et D on a :

$z_A=3+2i \Rightarrow A(3,2)$

$z_B = -1 + i \Rightarrow B(-1, 1)$
$z_C = -1 - i \Rightarrow C(-1, -1)$
$z_D = 3 \Rightarrow D(3, 0)$



ⓑ- l'affixe de milieu de [AC] est egale à :

$$\frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3 + 2i - 1 - i}{2}$$

$$= \frac{2 + i}{2} = 1 + \frac{1}{2} i$$

l'affixe du milieu de [BD] est égale a :

$$\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{3 - 1 + i}{2} = \frac{2 + i}{2} = 1 + \frac{1}{2} i$$

On constate que les milieux des segements [AC] et [BD] ont le même affixe.

ⓒ- D'aprés le resultat précédent on deduit que les segements [AC] et [BD] ont le même milieu. Donc le quadrilatere ABCD est un parallelogramme.

ⓓ- soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 3| = |z + 1 - i|$

Alors $M \in \Gamma \Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_B|$

$M \in \Gamma \Leftrightarrow MD = MB$

Alors Γ est la mediatrice du segement [BD].

Ex = 13 Bac 2013

1) Resolution d'equations

ⓐ - E_1 $z^2+2z+10=0$

le discriminent : $\Delta=(2)^2-4\times1\times10=-36=(6i)^2$

les solution z_1 et z_2 avec $Im\, z_2<0$

$z_1=\frac{-2+6i}{2}=-1+3i$ et $z_2=\frac{-2-6i}{2}=-1-3i$

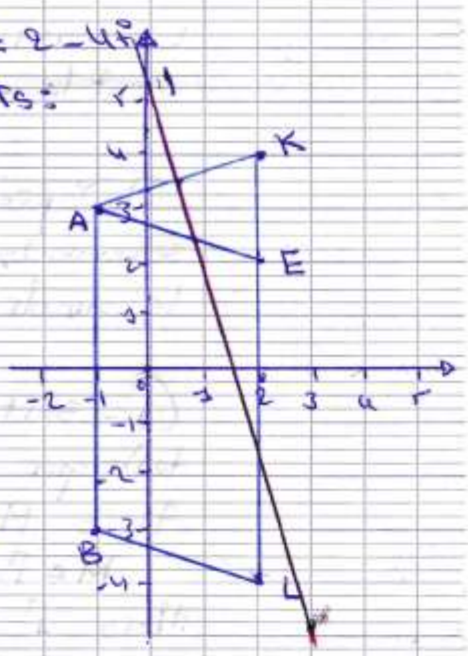
Ensemble de solution : $S_1=\{-1+3i\,;-1-3i\}$

ⓑ - E_2 : $\Delta=(4)^2-4\times1\times20=16-80=-64=(8i)^2$

les solutions z_3 et z_4 avec $Im\, z_4\leq0$

$z_3=\frac{4+8i}{2}=2+4i$ et $z_4=\frac{4-8i}{2}=2-4i$

2) ⓐ - representation des points :



$z_A=z_1=-1+3i\Rightarrow A(-1,3)$

$z_B=z_2=-1-3i\Rightarrow B(-1,-3)$

$z_K=z_3=2+4i\Rightarrow K(2;4)$

$z_L=z_4=2-4i\Rightarrow L(2,4)$

$z_E=z_3-2i=2+4i-2i$

$=2+2i\Rightarrow E(2,2)$

ⓑ - Forme algebrique de z_E :

$z_E=z_3-2i=2+4i-2i$

$\Rightarrow \boxed{z_E=2+2i}$

Forme trigonometrique :

$z_E=2+2i\Rightarrow |z_E|=\sqrt{(2)^2+(2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$z_E=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\Rightarrow \boxed{z_E=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

(4)

ⓒ- Nature du quadrilatère ABLE :
D'après la figure, il semble que ABLE est un parallélogramme. Pour la démonstration on a :

$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = -1-3i+1-3i = 6i$

$z_{\vec{AB}} = z_{\vec{EL}} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{EL}$ Alors ABLE est un parallélogramme.

Nature du teriangle AKE :
D'après la figure, il semble que AKE est isocèle en A
Pour la démonstration on a :

$AK = |z_K - z_A| = |2+4i+1-3i| = |3+i| = \sqrt{10}$ et

$AE = |z_E - z_A| = |2+2i+1-3i| = |3-i| = \sqrt{10}$

$AK = AE$. Alors le triangle AKE est isocèle en A

3) ⓐ- l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$:

On a $f(z) = \frac{z-2-4i}{z+1-3i}$. on constate que $f(z) = \frac{z-z_K}{z-z_A}$

Alors : $|f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-z_K}{z-z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-z_K| = |z-z_A|$

$\Leftrightarrow MK = MA$

D'où l'ensemble Γ_1 est la médiatrice du segment [AK].

Pour la construction, voir la figure

ⓑ- L'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z) - 1| = \sqrt{10}$

On a $|f(z)' - 1| = \sqrt{10} \Rightarrow \left|\frac{z-2-4i}{z+1-3i} - 1\right| = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \left|\frac{z-4i-z-1+3i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{10} \Rightarrow \left|\frac{-3-i}{z+1-3i}\right| = \sqrt{10}$

$\Rightarrow \frac{|-3-i|}{|z+1-3i|} = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{|z-z_A|} = \sqrt{10} \Rightarrow |z-z_A| = 1$

$\Rightarrow AM = 1$

Alors Γ_2 est le cercle de centre A et de rayon 1

Pour construction voir la figure.

Nombres Complex

Exercice 7 :

Ecrire en fonction de $\cos x$ et $\sin x$: $D = \cos 2x$, $E = \sin 2x$, $F = \cos 3x$, $G = \sin 3x$.

Solution :

On utilise la relation de Moivre :

$D + iE = \cos 2x + i\sin 2x$
$= e^{i2x} = (e^{ix})^2$
$= (\cos x + i\sin x)^2$
$= \cos^2 x - \sin x^2 + \sin x \cos x\, i$

$$\begin{cases} D = \cos^2 x - \sin x^2 \\ E = 2\sin x \cos x \end{cases}$$

$F + iG = \cos 3x + i\sin 3x$
$= e^{i3x} = (e^{ix})^3$
$= (e^{ix})^2 e^{ix}$
$= (\cos x^2 - \sin^2 x + 2\sin \cos \sin x)$
$(\cos x + 1\sin x)$
$= \cos^3 x + \sin x \cos^2 x\, i - \sin x^2 \cos x$
$= \sin^3 x\, i + 2\sin x \cos^2 x\, i - 2\sin^2 x \cos x$
$= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x + (-\sin x + 3\sin x \cos^2 x) i$

$$\begin{cases} F = \cos^3 x - 3\sin^2 \cos x \\ G = -\sin^3 x + 3\sin \cos^2 x \end{cases}$$

Gns 1 / 7D$_3$
Esmaa
Ramla
Minetou
Mariem

Suites

Exercice 1 p=11

1°)

$$U_n = \frac{2^n - U_n + 3}{2}$$

$$V_n = \frac{2^n + U_n - 3}{2}$$

$a_n = U_n + V_n$

$$= \frac{2^n - U_n + 3}{2} + \frac{2^n + U_n - 3}{2}$$

$$= \frac{2^n - \cancel{U_n} + \cancel{3} + 2^n + \cancel{U_n} - \cancel{3}}{2}$$

$$= \frac{2^n + 2^n}{2} = \frac{2 \times 2^n}{\cancel{2}} = 2^n$$

$$\boxed{a_n = 2^n}$$

$a_{n+1} = 2^{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n}$$
$= 2^1 = 2$

$\Rightarrow (a_n)$ est s.G de raison $q = 2$
et 1er terme $a_0 = 2^0 = 1$

$b_n = U_n - V_n$

$$= \frac{2^n + U_n + 3}{2} - \frac{2^n + U_n - 3}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2^n} U_n + 3 - \cancel{2^n} - U_n + 3}{2}$$

$$= \frac{-8n + 6}{2}$$

$$\boxed{b_n = -4n + 3}$$

$b_{n+1} = -4(n+1) + 3$
$= -4n - 4 + 3 = -4n - 1$
$b_{n+1} - b_n = -\cancel{4n} - 1 + \cancel{4n} - 3$
$= -4$

$\Rightarrow (b_n)$ s-A de raison $r = -4$
et 1er terme $b_0 = 3$.

2°) $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
$S_n' = V_0 + V_1 - \dots + V_n$

$$\begin{cases} a_n = U_n + V_n & (1) \\ b_n = U_n - V_n & (2) \end{cases}$$

(1) + (2) $\Rightarrow$
$2U_n = a_n + b_n$

(1) - (2) $\Rightarrow$
$2U_n = a_n - b_n$

$$\boxed{U_n = \frac{1}{2} a_n - \frac{1}{2} b_n}$$

$U_0 = \frac{1}{2} a_0 + \frac{1}{2} b_0$
$U_1 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2} b_1$
$\vdots$ +
$U_n = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} b_n$

$S_n = \frac{1}{2}(a_0 + a_1 \dots + a_n)$
$+ \frac{1}{2}(b_0 + b_1 \dots + b_n)$

$$S_n = \frac{1}{2} \times a_0 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{(n+1) \cdot (b_0 + b_n)}{2}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1 - 2^{n+1}}{-1}$$
$$+ \frac{(n+1)(3 - 4n + 3}{4}$$

$$\boxed{S_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2} + \frac{(n+1)(6 - 4x)}{4}}$$

$V_0 = \frac{1}{2} a_0 - \frac{1}{2} b_0$
$U_1 = \frac{1}{2} a_1 - \frac{1}{2} b_1$ +
$\vdots$
$U_n = \frac{1}{2} a_n - \frac{1}{2} b_n$

$S_n = \frac{1}{2}(a_0 + a_1 \dots a_n(-\frac{1}{2} b_0 + b_1)$

$$\boxed{S'_n = \frac{2^{n+1}-1}{2} - \frac{(n+1)(6-4n)}{n}}$$

Exercice 2 page 52

Solution :

$S_n = \frac{2}{1\times3} + \frac{2}{3\times5} + \frac{2}{5\times7} + \dots + \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$

1) $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{a}{2k+1} + \frac{b}{2k+3}$

$= \frac{a(2k+3)+b(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{2ak+3a+2bk+b}{(2k+1)(2k+3)}$

$= \frac{(2a+2b)k+3a+b}{(2k+1)(2k+3)}$

pour indentifications :

$\begin{cases} 2a+2b=0 \\ 3a+b=-2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2b=-2a \Rightarrow b=-a \\ 3a-a=2 \end{cases}$

$2a=2 \Rightarrow a=1$

$\boxed{b=-1}$

donc $\frac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2k+1} \frac{-1}{2k+3}$

2) $\frac{2}{1\times3} = \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}$

$\frac{2}{3\times5} = \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{5}}$

$\frac{2}{5\times7} = \cancel{\frac{1}{5}} - \frac{1}{7}$

$\vdots$

$\frac{2}{(2n+1)(2n+3)} = \cancel{\frac{1}{2n+1}} - \frac{1}{2n+3}$

$$\boxed{S_n = 1 - \frac{1}{2x+3}}$$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2x+3} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} S_n = 1}$

FIN.

Gn° 1 7D3
Esmaa
Ramla
Minetou
Mariem

Exercice 5 page 59

Solution

$\begin{cases} U_1 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$

1) calcule $U_2 = \frac{1}{2(1+1)} U_1 + \frac{3(1+2)}{2(1+1)}$

$= \frac{1}{4} \times (-1) + \frac{9}{4}$

$= \frac{-1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{8}{4} = 2$

$\boxed{U_2 = 2}$

$U_3 = \frac{2}{2(2+1)} U_2 + \frac{3(2+2)}{2(2+1)}$

$= \frac{1}{3} \times (2) + \frac{12}{6}$

$= \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$

$\boxed{U_3 = \frac{8}{3}}$

2°) Par demonstrat° par recurence:

1 Cas: $U_n \leq 3$

pour $n = 1$, $U_1 = -1 \leq 3$

donc on Verifier par $n = 1$

* on suppose que $U_0 \leq 3$
et on montre que $U_{n+1} \leq 3$

ona $U_n \leq 3$ et

$\frac{n}{2(n+1)} \geq 0$ donc $U_n \leq 3$

$\Rightarrow \frac{n}{2(n+1)} U_n \leq 3 \times \frac{n}{2(n+1)}$

$\frac{n}{2(n+1)} U_n \leq \frac{3n}{2(n+1)}$

$\frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \leq \frac{3n}{2(n+1)} + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$

$U_{n+1} \leq \frac{3n+3n+6}{2(n+1)} \Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{6n+6}{2(n+1)}$

$U_{n+1} \leq \frac{6(n+1)}{2(n+1)} \Rightarrow \boxed{U_{n+1} \leq 3}$

donc $\forall n \geq 1$, $U_n \leq 3$

3°) $U_{n+1} - U_n = \frac{n}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} - U_n$

$= \frac{n}{2(n+1)} U_n - U_n + \frac{3(n+1)}{2(n+1)}$

$= \left(\frac{n}{2(n+2)} - 1\right) U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$

$= \left(\frac{n - 2(n+1)}{2(n+1)}\right) U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$

$= \left(\frac{n-2n-2}{2(n+1)}\right) U_n + \frac{3(n+2)}{2(n+2)}$

$= \frac{-n-2}{2(n+1)} U_n + \frac{3(n+1)}{2(n+1)}$

$= \frac{n+2}{2(n+1)} [-U_n + 3]$

$= \frac{n+2}{2(n+1)} (3 - U_n) \leq 0$

$U_{n+1} - U_n \geq 0$

Donc (U_n) est croissante

- (U_n) croissante et majoreé par 3 donc elle est convergente

On pose
$\ell = \lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{x \to +\infty} U_{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2n+2}$

$= \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n}}{2\cancel{n}} = \frac{1}{2}$

* $\lim \frac{3(n+2)}{2(n+1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3n+6}{2n+2}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

$$l = \frac{1}{2} l + \frac{3}{2}$$

$$2l = l + 3 \Rightarrow 2l - l = 3$$

$$l = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} U_n = 3$$

4°) $V_n = (3 - U_n) - n$

a) $V_{n+1} = (3 - U_{n+1})(n+1)$

$$V_{n+1} = (3 - U_{n+1})(U_n + 1)$$

$$V_{n+1} = \left(3 - \frac{n}{2(n+1)} U_n - \frac{3(n+2)}{2(n+1)}\right)(n+1)$$

$$= 3(n+1) - \frac{n}{2} U_n - \frac{3}{2}(n+2)$$

$$= 3(n+1) - \frac{n}{2} U_n - \frac{3}{2}(n+2)$$

$$= 3n + \cancel{3} - \frac{3n}{2} - \cancel{3} - \frac{n}{2} U_n \qquad = 3(n+1) - \frac{n}{2} U_n - \frac{3}{2}(n+2)$$

$$= \frac{6n - 3n}{2} - \frac{n}{2} U_n$$

$$= \frac{3n}{2} - \frac{n}{2} U_n$$

$$= \frac{n}{2}(3 - U_n) = \frac{U_n}{2} = \frac{1}{2} V_n$$

(V_n) S.G de raison $a = \frac{1}{2}$

$$\cdot V_1 = (3 - \cancel{U_1}) \times 1$$

$$= (3 + 1) \times 1 = 4$$

$$V_n = V_1 \times q^{n-1} = 4 \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}$$

5°) on a $V_n = (3 - U_n) \times n$

$$\frac{V_n}{n} = 3 - V_n \qquad \boxed{U_n = 3 - \frac{V_n}{n}}$$

$$U_n = 3 - \frac{4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{n}$$

6°) $\cdot \lim_{n \to +\infty} U_n = \lim \left(3 - \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{n}\right)$

$$= 3 - \frac{0}{+\infty} = 3$$

$$\cdot S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

$$= V_1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 4 \frac{\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] 2}{1/2}$$

$$\boxed{S_n = 8\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}$$

Fin...